數學傳播 48卷4期, pp. 102-110

有關 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}]$ 的 Ramanujan-type 等式之研究

吳筱苓

壹、前言

印度天才數學家 S. Ramanujan 曾寫下等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 對於所有正整數 n 都成立 [1, p.77, Entry 23], 其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。K.-J. Chen [2] 以數論的方法重新證明了這個等式; 李錦鎣 [3] 也提供了微積分證明, 並做了一些推廣, 其中包含新等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+7}]=[\sqrt{9n+8}]$。

作者一開始的動機是想使用基礎的方法證明上述李錦鎣的新等式。在第二節中, 我們成功地利用一些基本的不等式 (引理 1) 完成了證明 (定理 1)。在研究過程中, 我們還意外地發現了三個類似的等式。由於這三個等式 (定理 2、3、4) 的證明方法相似, 都是藉由一些基本的不等式 (引理 2、3、4) 來完成, 所以, 在第三節中, 我們提供了其中一個等式 (定理 2) 的證明, 其餘兩個等式 (定理 3 及定理 4) 的證明則留給讀者自行完成。

如上所述, 這些等式的基礎證明是透過一些基本的不等式來完成; 而這些不等式的形成一開始是作者透過回推、拼湊與驗證得到的, 過程帶有一些技巧性。在第四節中, 我們利用微積分發現了引理中這些不等式會存在的理論基礎(定理 5), 且這個發現可以讓作者更有系統、更有效率地找出並證明這些不等式。

上述定理 5 的發現讓作者進一步將研究從 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}]$ 的 Ramanujan-type 等式延伸到尋找 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}]$ 的相關等式。在第五節中, 作爲拋磚引玉之用, 我們提供了一個這樣的等式 (定理 6), 而這個等式的證明將與先前等式的證明略有不同, 其關鍵不同之處在於我們直接使用定理 5 建構出證明中所需的不等式 (引理 5)。

貳、$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+7}]=[\sqrt{9n+8}]$ 的基礎證明

在證明定理 1 之前, 我們需要一些基本的不等式。

引理 1: 對於所有的正整數 n, 以下三個不等式皆成立。

$$n+\frac{1}{3}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2};$$

$$n+\frac{2}{3}<\sqrt{n(n+2)}<n+1;$$
$$n+1<\sqrt{(n+1)(n+2)}<n+\frac{3}{2}.$$

證明: 不難看出, 只要將引理中的各個不等式逐項平方、化簡並比較左右兩邊大小即可得證。以第一個不等式爲例,

$$n+\frac{1}{3}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{1}{2}$$

成立的充要條件爲

$$n^2+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}<n^2+n<n^2+n+\frac{1}{4},$$

即

$$-\frac{1}{3}n+\frac{1}{9}<0<\frac{1}{4}.$$

因爲最後這個不等式明顯對所有正整數 n 皆成立, 所以原不等式也對所有正整數 n 皆成立。引理中其餘兩個不等式的證明也類似, 在此省略。

定理 1: 對於所有的正整數 n,

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+7}]=[\sqrt{9n+8}].$$

證明: 對於任一整數 m, $m^2\equiv 0,1,4,7 \pmod 9$。因此, 當給定一正整數 n 時, $9n+8$ 不可能爲完全平方數, 此時我們可以找到一個正整數 k 使得

$$k^2\le 9n+7<9n+8<9n+9\le (k+1)^2,$$

即

$$k\le\sqrt{9n+7}<\sqrt{9n+8}<\sqrt{9n+9}\le k+1. \tag{1}$$

由 (1) 明顯可推得

$$[\sqrt{9n+7}]=[\sqrt{9n+8}]=k. \tag{2}$$

接下來, 將引理 1 的三個式子相加, 可得

$$3n+2<\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}<3n+3.$$

爲了將上式的中間項配成完全平方式, 我們將上式同乘以 2 並同時加上 $3n+3$, 得

$$9n+7<n+(n+1)+(n+2)+2\sqrt{n(n+1)}+2\sqrt{n(n+2)}+2\sqrt{(n+1)(n+2)}<9n+9,$$

即

$$9n+7<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})^2<9n+9.$$

因此,

$$\sqrt{9n+7}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}. \tag{3}$$

由 (1) 與 (3) 可以推得

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+7}]=k. \tag{4}$$

最後, 結合 (2) 與 (4), 我們得證: 對於所有正整數 n,

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+7}]=[\sqrt{9n+8}].$$

叁、有關 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}]$ 的三個 Ramanujan-type 新等式

在上一節的研究過程中, 我們額外發現了三個類似定理 1 的等式, 分別敘述成以下的定理 2、定理 3 及定理 4。由於證明方法類似, 我們僅提供定理 2 的證明, 並將定理 3 及定理 4 的證明留給讀者。

在證明定理 2 之前, 我們需要以下的不等式。

引理 2: 對於所有的正整數 n, 以下三個不等式皆成立。

$$\begin{aligned} n+\frac{9}{5}&<\sqrt{(n+1)(n+3)}<n+2;\\ n+\frac{12}{5}&<\sqrt{(n+1)(n+5)}<n+3;\\ n+\frac{19}{5}&<\sqrt{(n+3)(n+5)}<n+4. \end{aligned}$$

證明: 證明的方式與引理1的證明完全相似, 在此省略。

定理 2: 對於所有正整數 n,

$$[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}]=[\sqrt{9n+25}]=[\sqrt{9n+26}].$$

證明: 對於任一整數 m, $m^2\equiv 0,1,4,7 \pmod 9$。因此, 當給定一正整數 n 時, $9n+26$ 不可能爲完全平方數, 此時我們可以找到一個正整數 k 使得

$$k^2\le 9n+25<9n+26<9n+27\le (k+1)^2,$$

即

$$k \le \sqrt{9n+25} < \sqrt{9n+26} < \sqrt{9n+27} \le k+1. \tag{5}$$

由 (5) 明顯可推得

$$[\sqrt{9n+25}] = [\sqrt{9n+26}] = k. \tag{6}$$

接下來, 將引理 2 的三個式子相加, 可得

$$3n+8 < \sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{(n+1)(n+5)} + \sqrt{(n+3)(n+5)} < 3n+9.$$

爲了將上式的中間項配成完全平方式, 我們將上式同乘以 2 並同時加上 $3n+9$, 得

$$9n+25 < 3n+9+2\sqrt{(n+1)(n+3)}+2\sqrt{(n+1)(n+5)}+2\sqrt{(n+3)(n+5)} < 9n+27,$$

即

$$9n+25 < (\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5})^2 < 9n+27.$$

因此,

$$\sqrt{9n+25} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5} < \sqrt{9n+27}. \tag{7}$$

由 (5) 與 (7) 可以推得

$$[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}] = [\sqrt{9n+25}] = k. \tag{8}$$

最後, 結合 (6) 與 (8), 我們得證: 對於所有正整數 n,

$$[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+5}] = [\sqrt{9n+25}] = [\sqrt{9n+26}].$$

定理 3: 對於所有正整數 n,

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{9n+10}] = [\sqrt{9n+11}] = [\sqrt{9n+12}].$$

定理 4: 對於所有正整數 n,

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{9n+13}] = [\sqrt{9n+14}] = [\sqrt{9n+15}].$$

定理 3 及定理 4 的證明留給讀者。在證明這兩個等式時, 讀者可能分別需要以下的引理 3 和引理 4; 而引理 3 和引理 4 的證明方法與引理 1 的證明相似, 也一併留給讀者驗證。

引理 3: 對於所有的正整數 n, 以下三個不等式皆成立。

$$n+\frac{1}{3} < \sqrt{n(n+1)} < n+\frac{1}{2};$$

$$n+\frac{11}{12}<\sqrt{n(n+3)}<n+\frac{3}{2};$$
$$n+\frac{7}{4}<\sqrt{(n+1)(n+3)}<n+2.$$

引理 4: 對於所有的正整數 n, 以下三個不等式皆成立。

$$n+\frac{2}{3}<\sqrt{n(n+2)}<n+1;$$
$$n+\frac{11}{12}<\sqrt{n(n+3)}<n+\frac{3}{2};$$
$$n+\frac{29}{12}<\sqrt{(n+2)(n+3)}<n+\frac{5}{2}.$$

肆、上述各引理的理論基礎 — 微積分觀點

在上述各個 Ramanujan-type 等式的證明中, 各引理中的基礎不等式扮演著關鍵的角色, 這些看似不知從何而來的不等式是如何發現的呢? 事實上, 作者一開始是從欲證的等式回推、慢慢拼湊與驗算得來的! 然而, 在完成上述定理的證明後, 作者利用微積分發現了一個有系統的方法, 可以更有效率地發現這些不等式, 說明如下。

對於正整數 n, 我們想要尋找根式 $\sqrt{(n+a)(n+b)}-n$ 的上下界, 其中 $0\le a<b$。令

$$f(x)=\sqrt{(x+a)(x+b)}-x,\ x>0.$$

將 $f(x)$ 微分, 得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+a)+(x+b)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}-1=\frac{\frac{1}{2}\big((x+a)+(x+b)\big)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}-1. \tag{9}$$

利用算幾不等式及 $a<b$, 可得

$$\frac{1}{2}\big((x+a)+(x+b)\big)>\sqrt{(x+a)(x+b)}. \tag{10}$$

結合 (9) 與 (10), 得 $f'(x)>0$, 即當 $x>0$ 時, f 為嚴格遞增函數。
因此, 對於所有的正整數 n,

$$f(1)\le f(n)<\lim_{x\to\infty}f(x),$$

即

$$\sqrt{(1+a)(1+b)}-1\le\sqrt{(n+a)(n+b)}-n<\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right),$$

其中上式中的上界

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

因此, 對於所有正整數 n,

$$\sqrt{(1+a)(1+b)}-1\le\sqrt{(n+a)(n+b)}-n<\frac{a+b}{2}.$$

於是, 我們證明了以下定理。

定理 5: 給定 $0\le a<b$, 則對於所有正整數 n,

$$\sqrt{(1+a)(1+b)}-1\le\sqrt{(n+a)(n+b)}-n<\frac{a+b}{2}.$$

事實上, 定理 5 中不等式的上界 $\dfrac{a+b}{2}$ 及下界 $\sqrt{(1+a)(1+b)}-1$ 分別是數列 $\left\{\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的最小上界及最大下界, 也是一組具實用性的上下界, 我們從幾個面向說明如下。

(一) 由定理 5 得出的不等式比各引理中的不等式更爲精確, 因此也可以直接推得各引理中的不等式。以引理 2 的三個不等式來做說明: 首先, 在定理 5 中, 將數對 (a,b) 分別以 $(1,3),(1,5),(3,5)$ 代入, 可得三個不等式

$$n+(2\sqrt{2}-1)<\sqrt{(n+1)(n+3)}<n+2; \tag{11}$$

$$n+(2\sqrt{3}-1)<\sqrt{(n+1)(n+5)}<n+3; \tag{12}$$

$$n+(2\sqrt{6}-1)<\sqrt{(n+3)(n+5)}<n+4. \tag{13}$$

不難看出不等式 (11)、(12)、(13) 可以直接推得引理 2 的三個不等式, 原因是

$$\frac{9}{5}<(2\sqrt{2}-1)、\frac{12}{5}<(2\sqrt{3}-1)\text{ 且 }\frac{19}{5}<(2\sqrt{6}-1).$$

(二) 定理 5 的出現, 讓我們了解到爲何各引理中的不等式可以被成功地用來證明其對應的定理, 原因是它們的上下界足夠精確。以引理 2 的三個不等式爲例, 它們的上界分別與 (11)、(12)、(13) 完全一致, 而下界也都相當接近, 即

$$\frac{9}{5}\approx 2\sqrt{2}-1=1.828\ldots,\ \frac{12}{5}\approx 2\sqrt{3}-1=2.464\ldots,\ \frac{19}{5}\approx 2\sqrt{6}-1=3.898\ldots.$$

其他引理中的不等式也都符合類似的情形。

(三) 事實上, 根據 (一) 的說明, 各引理中的不等式都可被定理 5 得出的 (更精確) 不等式取代, 並被用來證明各對應的定理。然而, 舉例來說, 作者之所以不用 (11)、(12)、(13) 取代引理 2, 主要原因有二: 一是爲了真實呈現此研究的過程, 我們原本就是透過引理 2 來證明定理 2, 而定理 5 是後來才發現的; 二是想維持作者的初衷, 也就是使用基礎的方法證明這些等式, 更何況作者認爲引理 2 中的常數 $\frac{9}{5}$、$\frac{12}{5}$、$\frac{19}{5}$ 比 $2\sqrt{2}-1$、$2\sqrt{3}-1$、$2\sqrt{6}-1$ 友善又可愛多了!

伍、一個關於 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}]$ 的 Ramanujan-type 等式

在上一節中, 定理 5 的發現讓我們可以有系統地生成各個引理中的不等式, 這些不等式在各個定理的證明中扮演著關鍵的角色。基於這個原因, 作者想藉由定理 5 的威力, 進一步將研究從 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}]$ 的 Ramanujan-type 等式延伸到尋找 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}]$ 的相關等式。在本節中, 我們提供了一個這樣的等式 (定理 6) 作爲拋磚引玉之用, 而這個等式的證明將與先前等式的證明略有不同, 關鍵不同之處在於我們直接使用定理 5 建立了證明所需的不等式, 敘述如下。

引理 5: 對於所有的正整數 n, 以下六個不等式皆成立。

$$\begin{aligned}
n+(\sqrt{2}-1) &< \sqrt{n(n+1)} < n+\frac{1}{2};\\
n+(\sqrt{3}-1) &< \sqrt{n(n+2)} < n+1;\\
n+1 &< \sqrt{n(n+3)} < n+\frac{3}{2};\\
n+(\sqrt{6}-1) &< \sqrt{(n+1)(n+2)} < n+\frac{3}{2};\\
n+(2\sqrt{2}-1) &< \sqrt{(n+1)(n+3)} < n+2;\\
n+(2\sqrt{3}-1) &< \sqrt{(n+2)(n+3)} < n+\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

證明: 在定理 5 中, 將數對 (a,b) 分別以 $(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)$ 及 $(2,3)$ 代入即可得證。

定理 6: 對於所有正整數 n,

$$\begin{aligned}
[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] &= [\sqrt{16n+20}] = [\sqrt{16n+21}] = [\sqrt{16n+22}]\\
&= [\sqrt{16n+23}] = [\sqrt{16n+24}].
\end{aligned}$$

證明: 對於任一整數 m, $m^2 \equiv 0,1,4,9 \pmod{16}$。因此, 當給定一正整數 n 時, $16n+21$,

$16n+22, 16n+23, 16n+24$ 不可能爲完全平方數, 此時我們可以找到一個正整數 k 使得

$$k^2 \le 16n+20 < 16n+21 < 16n+22 < 16n+23 < 16n+24 < (k+1)^2,$$

即

$$k \le \sqrt{16n+20} < \sqrt{16n+21} < \sqrt{16n+22} < \sqrt{16n+23} < \sqrt{16n+24} < k+1. \tag{14}$$

由 (14) 明顯可推得

$$[\sqrt{16n+20}] = [\sqrt{16n+21}] = [\sqrt{16n+22}] = [\sqrt{16n+23}] = [\sqrt{16n+24}] = k. \tag{15}$$

接下來, 將引理 5 的六個式子相加, 可得

$$\begin{aligned} 6n+(3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}-4) &< \sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}+\sqrt{(n+1)(n+2)} \\ &\quad +\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)} < 6n+9. \end{aligned}$$

爲了將上式的中間項配成完全平方式, 我們將上式同乘以 2 並同時加上 $4n+6$, 整理得

$$16n+(6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2) < (\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3})^2 < 16n+24.$$

又因爲 $20 < 6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2$, 因此

$$\sqrt{16n+20} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} < \sqrt{16n+24}. \tag{16}$$

由 (14) 與 (16) 可以推得

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{16n+20}] = k. \tag{17}$$

最後, 結合 (15) 與 (17), 我們得證: 對於所有正整數 n,

$$\begin{aligned} [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] &= [\sqrt{16n+20}] = [\sqrt{16n+21}] = [\sqrt{16n+22}] \\ &= [\sqrt{16n+23}] = [\sqrt{16n+24}]. \end{aligned}$$

陸、結語

在本文中, 我們成功使用基礎數論的方法證明了一個已知的 Ramanujan-type 等式, 並藉此發現了另外三個新的類似等式。在證明這些等式的過程中, 各引理中的不等式扮演著關鍵的角色, 我們也利用微積分給出了這些不等式之所以存在的理論基礎; 透過這個理論基礎, 我們將研究成果從 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}]$ 的相關等式進一步延伸, 找到並證明了一個關於 $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}+\sqrt{n+c}+\sqrt{n+d}]$ 的等式, 並想藉由這個等式拋磚引玉, 讓有興趣的讀者也可以嘗試發現更多的類似等式。

另外, 本文只聚焦於與二次方根有關的等式。事實上, 文獻中還有一些是與三次方根相關的等式, 例如, 李錦鎣 [4] 使用微積分證明了 $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]=[\sqrt[3]{8n+4}]$, 而許閎揚 [5] 則利用基礎數論的方法再次證明了上述等式, 其證明過程也跟本文的方法類似, 需要使用一些關鍵的不等式。因此, 這引導我們進一步思考以下問題: 在處理三次方根的關鍵不等式時, 是否也有類似本文定理 5 的相關結果?

最後, 感謝數學天才 S. Ramanujan 爲我們展示了這類等式之美! 此外, 要特別感謝彰化藝術高中許閎揚老師不時給予寶貴的寫作建議及鼓勵, 帶領我進入數學文章寫作的領域, 讓我深深體會了研究數學的樂趣!

参考文獻

1. B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks* Part IV. New York: Springer-Verlag, 1994.
2. K.-J. Chen, On two identities of Ramanujan, *Natural Science and Education*, 1(2), 65-70, 2015.
3. 李錦鎣。等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$ 成立嗎? 數學傳播季刊, 39(3), 42-46, 2015。
4. 李錦鎣。等式 $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]=[\sqrt[3]{8n+4}]$ 不是一個孤立的等式。數學傳播季刊, 40(1), 72-80, 2016。
5. 許閎揚。$[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]=[\sqrt[3]{8n+3}]=[\sqrt[3]{8n+4}]$ 的一個初等證明。科學教育月刊, 63-65, 2020。

—本文作者任教國立彰化女子高級中學—